

## Elementare Herleitung der Dirac-Gleichung / III

Hans Sallhofer

Z. Naturforsch. **34a**, 1145–1146 (1979);  
eingegangen am 9. August 1979

*Elementary Derivation of the Dirac Equation / III*

Comparison of the solutions of the Dirac equation with the corresponding solutions of electrodynamics.

In der Elektrodynamik [1] (5) kommt die Energiegedichte  $U$  im Falle komplexer Feldstärken durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{U} + \operatorname{div} \mathbf{S} &= \{(\partial/\partial t)(1/2)[\varepsilon(E^{\text{Re}})^2 + \mu(H^{\text{Re}})^2] \\ &\quad + \operatorname{div} c \mathbf{E}^{\text{Re}} \times \mathbf{H}^{\text{Re}}\} \\ &+ \{(\partial/\partial t)(1/2)[\varepsilon(E^{\text{Im}})^2 + \mu(H^{\text{Im}})^2] \\ &\quad + \operatorname{div} c \mathbf{E}^{\text{Im}} \times \mathbf{H}^{\text{Im}}\} \\ &= (\dot{U}^{\text{Re}} + \operatorname{div} \mathbf{S}^{\text{Re}}) + (\dot{U}^{\text{Im}} + \operatorname{div} \mathbf{S}^{\text{Im}}) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

zum Ausdruck. Sie ergibt sich aus den ersten beiden Gleichungen von [1] (5) mit Hilfe der konjugiert-komplexen Feldstärken, der Identität

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad (2)$$

und den Komponentenbeziehungen

$$E_k = E_k^{\text{Re}} + i E_k^{\text{Im}}, \quad H_k = H_k^{\text{Re}} + i H_k^{\text{Im}}. \quad (3)$$

Realfeld und Imaginärfeld werden in (1) ersichtlich als gleichbedeutende Schilderungen zweier getrennter Realitäten ausgewiesen.

Die Auswirkung des Lösungsansatzes [1] (6)/[1] (7) auf die Energiebilanz von [1] (5) wird durch eine Gegenüberstellung deutlich, die sich mit Hilfe der Gleichung [1] (8) und ihrer konjugiert-komplexen Form

$$(\partial/\partial t)^* \Psi_k^* = 0 \quad (4)$$

(übersternte Größen = Konjugiertkomplexe)

wie folgt ermitteln lässt: Man multipliziert die erste Gleichung von [1] (8) mit  $\Psi_1^*$ , die zweite mit  $\Psi_2^*$ , usw., – und in gleicher Weise – die erste Gleichung von (4) mit  $\Psi_1$ , die zweite mit  $\Psi_2$ , usw.,

Sonderdruckanforderungen an Dr. Hans Sallhofer, Fischerstraße 12, A-5280 Braunau, Austria.

0340-4811 / 79 / 0900-1145 \$ 01.00/0.

Please order a reprint rather than making your own copy.

und addiert dann alle acht Gleichungen. Nach Einsetzen aus [1] (7) kommt bei schließlicher Berücksichtigung von (3) die Energiebilanz

$$\begin{aligned} (\dot{U}^{\text{Re}} + \operatorname{div} \mathbf{S}^{\text{Re}}) + (\dot{U}^{\text{Im}} + \operatorname{div} \mathbf{S}^{\text{Im}}) \\ + (\dot{U} + \operatorname{div} \mathbf{S}) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Und hieraus folgt endlich wegen (1)

$$\dot{U} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (6)$$

Diese Gleichung schränkt die elektrodynamischen Lösungen gegenüber den wellenmechanischen ein. Sie ist eine Folge davon, daß für den Lösungsansatz [1] (6)/[1] (7) alle vier Gleichungen von [1] (5) herangezogen werden mußten, während die Kontinuitätsgleichung (1) schon aus den beiden ersten folgt. Da die beiden letzten die zwischen [1] (4) und [1] (5) angesprochene Normalstandbedingung

$$\mathbf{E} \perp \operatorname{grad} \varepsilon, \quad \mathbf{H} \perp \operatorname{grad} \mu \quad (7)$$

mitbringen, erfüllen Lösungen, die (6) befolgen, auch (7).

Im Falle des Diracschen Wasserstoff-Spinors (erste Spinalternative) [2]

$$\Psi = \begin{cases} \Psi_1 = -i P_{l+1}^m R_1^I \exp i(m\varphi - \omega^I t) \\ \Psi_2 = -i P_{l+1}^{m+1} R_1^I \exp i[(m+1)\varphi - \omega^I t] \\ \Psi_3 = (l+m+1) P_l^m R_3^I \exp i(m\varphi - \omega^I t) \\ \Psi_4 = -(l-m) P_l^{m+1} R_3^I \\ \quad \cdot \exp i[(m+1)\varphi - \omega^I t] \end{cases} \quad (8)$$

lässt es die Konzeption eines einheitlichen Wellenvorgangs als zweckmäßig erscheinen, die Relation [1] (7) so zu lesen, daß allen Komponenten der beiden elektromagnetischen Felder (Imaginärfeld und Realfeld) bei festem Radius eine einheitliche Wellenlänge zukommt. Die vierte Gleichung der Relation beispielsweise, die die vierte Spinorkomponente den ersten und zweiten magnetischen Komponenten gegenüberstellt, wäre dann nach (8) so zu schreiben:

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= H_1 + i H_2 = \\ &= -(l-m) P_l^{m+1} R_3^I (\cos \varphi \\ &\quad + i \sin \varphi) \exp i(m\varphi - \omega^I t) \\ &= -(1/2)(l-m) P_l^{m+1} R_3^I (\cos \varphi \\ &\quad + i \sin \varphi) \exp i(m\varphi - \omega^I t) \\ &\quad - (1/2)(l-m) P_l^{m+1} R_3^I (\sin \varphi \\ &\quad - i \cos \varphi) \exp i(m\varphi - \omega^I t + \pi/2) \end{aligned} \quad (9)$$



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

und

$$\begin{aligned} H_1 &= - (1/2) (l-m) P_1^{m+1} \\ &\quad \cdot R_3^I [\cos \varphi \exp i(m\varphi - \omega^I t) \\ &\quad + \sin \varphi \cdot \exp i(m\varphi - \omega^I t + \pi/2)] \\ H_2 &= - (1/2) (l-m) P_1^{m+1} \\ &\quad \cdot R_3^I [\sin \varphi \exp i(m\varphi - \omega^I t) \\ &\quad - \cos \varphi \cdot \exp i(m\varphi - \omega^I t + \pi/2)]. \end{aligned}$$

Man erfährt hier beiläufig, wie die Theorie [1] (5) es anstellt, Lösungen durch die Entfaltung (9) der Bedingung (7) zu unterwerfen. Man sieht auch, daß der Wasserstoff-Spinor (8) aus der Sicht der Elektrodynamik als eine unerentwickelte Größe erscheint, die ihre zweite und vierte Komponente nicht entfalten und somit keinen einheitlichen Wellenvorgang beschreiben kann. Aus (9) geht ferner hervor, daß die Spins der beiden Felder einer Lösung durch

die ersten und zweiten elektrischen oder magnetischen Komponenten zum Ausdruck kommen.

Im Hinblick auf die formale Struktur der Elektrodynamik [1] (5) stellt sich die Frage, was die zweiteiligen Lösungen darstellen sollen, oder allgemeiner, welche fundamentalen Informationen aus der Gestalt von [1] (5) erfließen. — Wegen der dritten Gleichung sind die Felder jedenfalls ladungsfrei. Das heißt im Falle des Wasserstoffproblems: Es gibt hier kein Umlaufelektron. Weiters besagen die beiden ersten Gleichungen, daß eine Brechung vorhanden ist, die beiden letzten (Materialgleichungen) hingegen, daß sich der beschriebene Vorgang im leeren Raum abspielt. Bleibt nur das Bild eines „interfraktionären“ Phänomens: Die beiden Wellenfelder einer Lösung brechen sich gegenseitig inhomogen, isotrop und zeitunabhängig.

[1] H. Sallhofer, Z. Naturforsch. **33a**, 1378–1379 (1978).

[2] C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. **118**, 654 (1928).